**SOLUCIONARIO PARA II OLIMPIADA FEMENINA DE MATEMATICAS BACHILLERATO**

**Problema # 1**

De un grupo de varones y mujeres se van 30 mujeres. Quedan así, 2 varones por cada mujer. Luego se van 90 varones y entonces hay 5 mujeres por cada varón. Determinar el número de mujeres que había al principio.

SOLUCIÓN:

Sean v: número de varones que había al principio

m: número de mujeres que había al principio

Al quitar 30 mujeres queda el doble de varones. O sea:

2(m – 30) = v

Después se quitan 90 varones y la cantidad de mujeres es el quíntuplo. Es decir:

5(v – 90) = m – 30

Resolviendo: 5[ 2(m – 30) – 90] = m – 30; 10(m – 30) – 450 = (m – 30)

9(m – 30) = 450; m – 30 = 50; m = 80

**Problema #2**

Hay 2015 personas en una megafiesta. Supongamos que cada una de ellas estrecha las manos de, al menos, una persona. Demuestre que tiene que haber alguien que estrecha las manos de, al menos, dos personas.

1ra SOLUCIÓN:

Nos dicen que cada persona estrecha las manos de una o más personas. ¿Cuál sería el peor escenario que cumple con esto? Que estreche la mano de SOLO UNA persona. Intentemos formar a las personas de tal modo que esto se cumpla. Vemos que podemos armar 1007 parejas con 2014

personas distintas, dejando a una sin emparejar. Pero no puede quedar nadie sin emparejar, luego la persona desemparejada tiene que darle la mano a alguna emparejada, y esa otra persona ya habrá estrechado las manos de dos personas.

2da SOLUCIÓN:

No es imprescindible usar Teoría de Grafos para resolverlo, pero es una herramienta muy útil para problemas más difíciles.

Vamos a denotar las 605 personas por 605 vértices

Si cualesquiera 2 personas estrechan las manos, entonces hay una arista que une los correspondientes vértices.

Esto significa que el grafo G consiste de varias aristas donde cada una de ellas junta dos vértices.

Como G tienes r aristas, el grafo tiene 2r vértices. Pero, 2r = 605 es una contradicción. Por lo tanto, alguien estrecha al menos dos manos.

**Problema #3**

Encontrar un número entero de 10 dígitos, tal que todos sus dígitos sean distintos y después de tacharle 6 dígitos, cualesquiera que sean estos 6 dígitos, se obtiene un número de 4 cifras que es compuesto (no es primo).

SOLUCIÓN:

Voy a intentar lo contrario. Ver si es posible que quede un número primo después de quitarle 6 dígitos. Debe ser obvio que si termina en par, el número es compuesto, y si termina en 5, es divisible para 5. Por tanto, “quito” los pares y el 5, y solo me quedan 1,3,7, y 9. Como en realidad quiero que el número que me quede sea compuesto, debo averiguar cuál de estos números lo es. ¿9713, 1397, 1793, etc.?

Notamos que suman 20, lo que significa que puedo dividirlos en parejas que sumen 10, como por ejemplo 9317. Este número es divisible para 11 ya que la suma de las cifras de las posiciones pares, restadas de la suma de las cifras de las posiciones impares es múltiplo de 11. En nuestro caso, 0 que es múltiplo de 11.

Como solo nos piden que hallemos un número, claramente:

9317864205 cumple las condiciones.

Si no tachamos alguna de las 6 últimas cifras, será par o múltiplo de 5. Pero

Si tachamos las últimas 6, nos quedará 9317, que es múltiplo de 11.

**Problema #4**

Un cuadrado con lado igual a un número entero se cortó en 10 cuadrados, todos de lados de longitudes enteras, con por lo menos 8 de ellos de área 1. Dar la menor longitud posible del lado del cuadrado original.

SOLUCIÓN:

Ya que el cuadrado original consta de, por lo menos, 8 cuadrados de área 1, queda claro que el área A del cuadrado original es A > 8. Además, ya que es un cuadrado, de lado entero, su área tiene que ser un cuadrado perfecto.

¿Será 9? No puede ser 9, porque el cuadrado original consta de 10 cuadrados de, al menos área 1. En estricto rigor, A .

El siguiente cuadrado es 16. ¿Será 16? ¿En un cuadrado de lado 4, podemos incluir 8 cuadrados de área 1, y otros dos cuadrados más? Sí.

Hay varios ejemplos posibles. Partamos el cuadrado en dos rectángulos de 2x4. En el rectángulo superior “insertamos” los 8 cuadrado de área 1, y en la parte inferior, dos cuadrados de área 2.

Luego, la menor longitud posible del lado es 4.

**Problema #5**

Hallar todos los números naturales de 5 dígitos, distintos de cero, que son cuadrados perfectos y, siguen siendo cuadrados perfectos, si se les suprime el primer dígito (de la izquierda), también siguen siendo cuadrados perfectos, si se les suprimen el primero y segundo dígitos, y lo mismo ocurre, si se les suprimen los primeros tres dígitos.

SOLUCIÓN:

Como los números que buscamos siguen siendo cuadrados perfectos si suprimimos las tres primeras cifras, significa que sus dos últimas cifras son alguna (s) del conjunto {16, 25, 36, 49, 64, 81}.

Claramente no incluimos 01, ni 04, ni 09, porque nos piden cifras distintas de cero.

Ahora, debemos preguntarnos, ¿cuántos números de tres cifras terminan en 16, 25, 36, 49, 64, o 81. Y esos números de tres cifras tienen que ser también cuadrados perfectos. Los números n que buscamos deben cumplir .

Esos cuadrados son {121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961}.

Los únicos números que terminan en un cuadrado de dos cifras son 225 y 625. Ya sabemos que las dos últimas cifras del número buscado son 25 y que la tercera cifra, desde la izquierda es 2 o 6.

Ahora debemos buscar todos los cuadrados de 4 cifras que terminen en 25, o

más precisamente, que terminen en 225 o 625.

Los cuadrados de 4 cifras están entre

Pero solo nos interesan los que terminan en 5, que al ser elevados al cuadrado terminan en 25. Esos son muy pocos.

También nos ayudará recordar que todo número de la forma + 25. Es decir, es como si quitáramos el 5, multiplicamos a por su siguiente (a + 1) y al resultado añadimos 25.

Veamos con = 1225. O sea tomamos el 3, lo multiplicamos por su siguiente 4, obteniendo 3\*4 = 12, y a ese resultado añadimos 25. Lo pueden corroborar con los siguientes cuadrados:

= 2025

= 3025

= 4225

= 5625

= 7225

= 9025

= 11025

Los únicos que terminan en 225 o 625 son 1225, 4225, 5625 y 7225, que clasifican a la final.

Ahora solo falta hallar los cuadrados de 5 cifras que terminen en 1225, 4225, 5625 o 7225.

Esos cuadrados estarán entre . Por supuesto, que terminen en 5.

Después de buscar esos números de la forma que ya sabemos, tenemos que los únicos que cumplen esto, son:

= 15625, = 27225, = 34225, = 75625 y = 81225.

Los números que cumplen con las condiciones son: 15625, 27225, 34225, 75625 y 81225.

**Problema #6**

La abuela de Andrea olvidó la clave de 5 dígitos para abrir su valija. Ella recuerda que: (i) no tiene ningún cero, (ii) tiene 3 dígitos que son múltiplos de 4, (iii) tiene dos dígitos que son múltiplos de 3, y (iv) no tiene dígitos consecutivos iguales. ¿Cuántas son las posibles claves de la abuela de Andrea?

1ra SOLUCIÓN:

Vamos a sacar provecho de la SIMETRÍA, que no es un concepto solo de la Geometría, sino transversal a toda la matemática.

Voy a BOSQUEJAR la MITAD DE LOS CASOS, y voy a mostrar que son 153.

En nuestro número NO entra el cero, por tanto, voy a usar:

3 múltiplos de 4 (4, 8) y 2 múltiplos de 3 (3, 6, 9).

Es claro que UN MISMO DÍGITO, A LO MÁS, puede aparecer 3 veces. Me refiero al 4 ó al 8, porque si apareciera más veces, sería IMPOSIBLE que no

haya dos consecutivos iguales.

1er CASO: Si 3 dígitos son CUATROS

La única disposición posible es 4x4x4, donde las x se

llenarán con dos de los dígitos de {3, 6, 9} si son distintos,

pero que podría repetirse.

Si son distintos, elijo C (3, 2) = C (3, 1) = 3

Estos dos dígitos se pueden ordenar de 2! formas. O sea,

3\*2 = 6

Si son iguales, es obvio que hay 3 porque solo tengo que

insertar el 3, 6 ó 9.

En total, 6 + 3 = 9, para este CASO.

2do CASO: Si 2 dígitos son CUATROS y los otros, diferentes:

(i) Si un 4 está al inicio del número

Por ejemplo: 4x4xx

Las tres x debo llenarlas con UN OCHO, y dos dígitos de {3, 6, 9]

Elijo dos de esos tres dígitos de C (3, 2) = 3

Una vez que tengo estos dos dígitos más el OCHO, tengo que

ordenar la disposición de los 3 dígitos, de 3! maneras.

O sea: 3\*3! = 3\*6 = 18

Las otras disposiciones con un 4 al inicio son: 4xx4x y 4xxx4.

Para cada una de ellas se repite el razonamiento, por lo que

tenemos: 18 + 18 + 18 = 54 para este SUBCASO.

(ii) Si el primer 4 está en la segunda casilla: x4x4x ó x4xx4

El razonamiento es análogo, por lo que 18 + 18 = 36, para este

SUBCASO.

(iii) Si el primer 4 está en la tercera casilla: xx4x4.

El razonamiento es semejante, por lo que tenemos otro 18.

En TOTAL para este CASO, se tiene: 54 + 36 + 18 = 108

3er CASO: Si 2 dígitos son CUATROS, pero el múltiplo de 3 se repite.

(i) Si el primer 4 está en la primera casilla:

Comenzando con la disposición 4x4xx, imaginemos que el que se

repite es el 3. Entonces, en vez de las x va un 8 y 3, 3.

Obligatoriamente un 3 va en la segunda casilla: 434xx, por lo que

quedan 2 opciones 38 y 83

Si la disposición es 4xx4x, un 3 va obligado en la última. O sea:

4xx43. Solo cabe 38 y 83.

Si la disposición es 4xxx4, el 8 está obligado a ir al centro, 43834.

¡Un solo caso!

TOTAL DEL SUBCASO: 2 + 2 + 1 = 5

(ii) Si el primer 4 está en la segunda casilla:

Para x4x4x, hay que insertar 8, 3 y 3. ¿De cuántos modos se

puede ordenar 833? Evidentemente de 3 maneras, que están

condicionadas por el lugar del 8.

Para x4xx4, obligadamente un 3 va al inicio: 34xx4 y solo cabe

38 u 83.

TOTAL para este SUBCASO; 3 + 2 = 5.

(iii) Si el primer 4 está en medio:

De xx4x4, se deduce que un 3 debe estar en medio de los 4.

xx434, solo da para 38 y 83.

TOTAL PARA EL CASO: 5 + 5 + 2 = 12.

Es evidente que si el múltiplo de 3 que se repite es el 6, hay 12 más.

Igualmente si el que se repite es el 9, hay 12 más.

Así el TERCER CASO TOTALIZA: 12 + 12 + 12 = 36.

Los TRES CASOS SUMAN: 9 + 108 + 36 = 153.

Pero nos hemos "olvidado" de que todos estos razonamientos se repiten si el dígito "preponderante" hubiese sido el OCHO. Luego, por SIMETRÍA: 2(153) = 306 casos.

2da SOLUCIÓN:

Un poco menos elemental, pero más breve haciendo uso del principio de INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN para el conteo, lo que nos permite evitar muchos subcasos.

Igual que la solución anterior, me guiaré por la "predominancia" del 4.

CASO 1: Si hay 3 CUATROS:

Nuestro número es de la forma 4X4X4, donde las X tienen que ser llenadas

por algún múltiplo de 3, del conjunto {3, 6, 9}. Cada X se puede llenar de

3 formas, es decir:

(3)(3) = 9 maneras

CASO 2: Si hay 2 CUATROS y los otros dígitos son 8, a y b (a <>b)

Tenemos que ordenar 5 números: 4, 4, 8, a, b. Como hay dos que se

repiten:

5! / 2! = 3\*4\*5 = 60

Pero aquí están incluidos los casos en que los 4 están juntos. Tenemos

que excluir esa situación.

Vamos a ordenar (44), 8, a, b como si (44) fuera un solo bloque. Vamos

a ordenar 4 objetos distintos, que sabemos es igual a 4! = 24.

Estos casos se los quitamos a 60 y tenemos 60 - 24 = 36.

Ahora, a y b son dos números del conjunto {3, 6, 9}. ¿De cuántas maneras escojo 2 de 3? Del mismo modo que dejo 1 de 3. O sea de 3 maneras:

C (3, 2) = C (3, 1) = 3

Por tanto: 36\*3 = 108

CASO 3: Hay 2 CUATROS, y los otros dígitos son 8, a y a.

Es decir, se repite el múltiplo de 3.

Ahora tenemos que ordenar 4, 4, 8, a, a

Sin restricciones esta ordenación con repetición, nos daría:

5! / (2!\*2!) = 120 / 4 = 30

Pero tenemos la restricción de que los 4 no pueden ir juntos:

Igual que antes, ordenamos: (44), 8, a, a, tomando solo (44)

como un bloque. Eso nos da:

4! / 2! = 3\*4 = 12

Similarmente, vamos a quitar los casos en que se repite a.

Ahora quiero ordenar: 4, 4, 8, (aa), tomando como un objeto (aa).

Es obvio que el resultado también nos da 12.

Sin embargo, si a 30 le quitamos 12 y otra vez 12, estaríamos quitando de más, porque hay casos que se repiten en uno y otro.

Ahora calculemos la situación: (44), 8, (aa)

Esto se puede ordenar de 3! = 6 maneras. Ahora si podemos "reponer" el error que hubiésemos cometido si solamente quitábamos dos veces 12. Ahora es cuando FORMALMENTE aplicamos el principio de INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN:

30 - 12 - 12 + 6 = 12, que es el conteo correcto.

Pero a era un número de {3, 6, 9}. Luego, hay 3 formas de elegir a a.

Por tanto: 12\*3 = 36

TOTALIZANDO LOS TRES CASOS, tenemos: 9 + 108 + 36 = 153.

Pero como la situación es SIMÉTRICA, si considero al 8, como múltiplo de 4 "preponderante", tenemos: 153\*2 = 306.